О КОРРЕКТНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛУПОЛОСЕ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Н.М.СУЛЕЙМАНОВ
Бакинский Государственный Университет

В настоящей работе изучается вопрос о корректной постановке смешанных задач в бесконечной полуполосе для общих уравнений в частных производных в классе обобщенных функций. Найдены необходимые и достаточные условия, гарантирующие корректность постановки смешанных задач в некотором классе обобщенных функций.

В области $t \geq 0, 0 \leq x \leq 1$ рассматривается уравнение вида

$$\frac{\partial^m U(x,t)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k U(x,t)}{\partial t^k} = \sum_{j=0}^{p} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^j U(x,t)}{\partial x^j}, \qquad (1)$$

где многочлены $P_k(s)$ (с постоянными коэффициентами) имеют максимальную степень p.

Требуется найти решение уравнения (1) при заданных граничных

$$\frac{\partial^k U(0,t)}{\partial x^k} = W_k^0(t), \qquad \frac{\partial^k U(1,t)}{\partial x^k} = W_k^1(t), \; k = 0,1,\ldots, p-1, \qquad (2)$$

и начальных функциях

$$\frac{\partial^k U(x,0)}{\partial t^k} = U_k(x), \; k = 0,1,2,\ldots,r-1 \qquad (3)$$

(число r определяется далее). В обобщенных функциях уравнение (1) с граничными условиями (2) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^m U(x,t)}{\partial t^m} = \sum_{j=0}^{p} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\frac{\partial^j U}{\partial x^j} - \sum_{k=0}^{j-1} \overset{o}{W}_k(t)\delta^{(j-1-k)}(x) + \sum_{k=0}^{j-1} \overset{1}{W}_k(t)\delta^{(j-1-k)}(x-1)\right]. \qquad (4)$$

Наша цель — найти аналог постановки классической задачи (1)-(3) в классе обобщенных функций и выявить возможные корректные постановки краевых задач для любого уравнения вида (1): какие начальные (и сколько их) и граничные условия нужно присоединить к уравнению (1), чтобы полученная задача была бы корректно поставленной в некотором классе H_+^β обобщенных функций. При этом краевая задача считается корректной в классе H_+^β, если ее решение существует и единственно и непрерывно зависит (в смысле H_+^β) от начальных данных.

Решение ищется в классе H_+^β обобщенных функций $u(x,t)$, которые при каждом t являются производными любого порядка (в смысле обобщенных функций) от обычных функций $f(x)$, таких, что при некотором β $f(x)e^{-\beta x} \in L_2(0,\infty)$, и возрастающих при $t \to \infty$ не быстрее некоторой степени t.

Предполагается, что корни $\lambda_0(s)$, $\lambda_1(s),\dots,\lambda_{m-1}(s)$ характеристического уравнения

$$\lambda^m = \sum_{k=0}^{m-1} P_k(s)\lambda^k \tag{5}$$

не совпадают в полуплоскости $\operatorname{Im} s > \beta$. Тогда число r в условии (3) означает количество корней уравнения (5), которые в полуплоскости $\operatorname{Im} s > \beta$ имеют неположительную реальную часть. Функции $W_k^0(t)$ и $W_k^1(t)$ – непрерывно дифференцируемы до порядка m - 1 и при $t \to \infty$ растут не быстрее некоторой степени t.

После применения преобразования Фурье из (4) получается уравнение вида (в векторной записи)

$$\frac{dV(s,t)}{dt} = P(s)V(s,t) + g(s,t) \;, \tag{6}$$

где

$$g(s,t) = \sum_{j=0}^{p} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\sum_{k=0}^{j-1} W_{j-1-k}^0(t)(-is)^k + \sum_{k=0}^{j-1} W_{j-1-k}^1(t)(-is)^k e^{is}\right]. \tag{7}$$

Основным результатом статьи является следующая

Теорема. При выполнении перечисленных выше предположений относительно данных для корректности постановки задачи (1)-(3) в классе H_+^β необходимо и достаточно, чтобы функции

$$G_q(s) = \int_0^\infty e^{-\theta\lambda_q(s)} g(s,\theta)d\theta \;\; (\, q = r, r+1, \dots,\; m-1), \tag{8}$$

где $g(s,t)$ определяется формулой (7), определенные первоначально в области $\operatorname{Re}\lambda_q(s) > 0$, $\operatorname{Im} s > \beta$ допускали аналитическое продолжение на всю полуплоскость $\operatorname{Im} s > \beta$ до функций из класса $\widetilde{H}_+^\beta$ (преобразование Фурье пространства H_+^β).

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Характеристические корни: $\lambda_{0,1} = \pm s$. Следовательно, $r = 0,\ q = 2,\ \beta = 0$. Корректная задача: начальные данные не задавать, а функции $W_k^0(t)$ и $W_k^1(t)$ должны быть такими, что функции

$$G_1(s) = \int_0^\infty e^{-ts} g(s,\ t)dt, \quad G_2(s) = \int_0^\infty e^{ts} g(s,\ t)dt,$$

где

$$g(s,t) = \left[W_1^1(t) - isW_0^1(t)\right]e^{is} + isW_0^0(t) - W_1^0(t),$$

должны аналитически продолжаться со своей первоначальной области определения ($\mathrm{Re}\, s > 0$ – для первого случая и $\mathrm{Re} s < 0$ – для второго) в полуплоскость $\mathrm{Im}\, s > 0$ до функций пространства $\widetilde{H}_+^\beta$.

Вторым типичным примером является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0.$$

Характеристические корни этого уравнения удовлетворяют уравнению $\lambda^2 = -s^2$, $s = \sigma + i\tau$, $\lambda_{0,1} = \pm is$. Один из этих корней всюду в полуплоскости $\mathrm{Im}\, s > 0$ имеет положительную реальную часть, поэтому требование аналитической продолжаемости интеграла

$$G_1(s) = \int_0^\infty e^{-\theta\lambda_1(s)} g(s,\theta)d\theta$$

в условии теоремы отпадает и, в силу нашей общей теории, корректная задача состоит в задании функций $W_0^0(t)$, $W_0^1(t)$, $W_1^0(t)$, $W_1^1(t)$, $U_0(x)$– – это есть известная классическая смешанная задача для волнового уравнения.

Фрагменты доказательства теоремы. Для удобства вместо одного уравнения (1) рассмотрим систему 1-го порядка

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \boldsymbol{P}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x,\ t), \quad t \geq 0,\ 0 \leq x \leq 1. \qquad (1')$$

К этой системе добавляется начальное условие

$$U(x,0) = U_0(x) \qquad (2')$$

и граничные условия (в векторной записи)

$$W_k^0(t) = \frac{\partial^k U(o,\ t)}{\partial x^k}, \quad W_k^1(t) = \frac{\partial^k U(1,\ t)}{\partial x^k},\ k = 0,1,\ldots,p-1. \qquad (3')$$

Запишем систему $(1')$ в виде

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=0}^{p} a_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^k U(x,\ t)\ , \qquad (4')$$

где a_k - числовые матрицы. В пространстве обобщенных функций система ($4'$) с граничными условиями ($3'$) принимает такой вид:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=0}^{p} a_k\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^k U(x,t)-\sum_{j=0}^{p-1} W_{k-1-j}^{0}(t)\delta^{(k-1-j)}(x)+\sum_{j=0}^{k-1} W_{k-1-j}^{1}(t)\delta^{(k-1-j)}(x-1)\right].$$

После преобразования Фурье отсюда получается система (6), (7). Начальное условие переходит в условие

$$V(s,0)=V_0(s). \qquad (9)$$

При каждом s решение задачи (6)-(8) определяется формулой

$$V(s,t)=e^{tP(s)}V_0(s)+\int_0^t e^{(t-\theta)P(s)}g(s,\theta)d\theta. \qquad (10)$$

Пусть при данном s оператор $P(s)$ в евклидовом пространстве R_s^n имеет r (некоторое число) характеристических корней с неположительными реальными частями и m - r корней с положительной вещественной частью. Тогда пространство R_s^n разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств оператора $P(s)$. Векторы $V(s,t), V_0(s), g(s,t)$ тоже разлагаются на составляющие $V^+(s,t), V^-(s,t), V_0^+(s), V_0^-(s), g^+(s,t), g^-(s,t)$. Тогда из (10) получается, что:

$$V^-(s,t)=e^{tP(s)}V_0^-(s)+\int_0^t e^{(t-\theta)P(s)}g^-(s,\theta)d\theta,$$

$$V^+(s,t)=e^{tP(s)}V_0^+(s)+\int_0^t e^{(t-\theta)P(s)}g^+(s,\theta)d\theta.$$

В силу известной оценки, установленной для оператор-функции $e^{tP(s)}$ Г.Е.Шиловым:

$$\left\|e^{tP(s)}\right\|\le e^{t\Lambda(s)}\left[1+2t\|P(s)\|+\ldots+\frac{(2t)^{m-1}}{(m-1)!}\|P(s)\|^{m-1}\right], \qquad (11)$$

где $\Lambda(s)=\max\limits_{0\le j\le m-1}\operatorname{Re}\lambda_j(s)$, $\|P(s)\|^2\le\sum\limits_j\sum\limits_k\left|P_{jk}(s)\right|^2\le c(1+|s|)^p$, для случая $V_0(s)\in R_s^-$ получается оценка

$$\left\| e^{tP(s)} \right\| \le ct^{m-1}\left(1+|s|\right)^{P(m-1)}.$$

Из этих оценок следует, что компонента $V^{-}(s,t)$ вектора $V(s,t)$ при $t \to \infty$ возрастает в R_s^{-} не быстрее степени t.

Выражение функции $V(s,t)$ представим в виде

$$V(s,t) = e^{tP(s)}\left[V_0(s) + J_0(s)\right] - \int_t^{\infty} e^{(t-\theta)P(s)} g^{+}(s,\theta)d\theta\,, \tag{12}$$

$$J_0(s) = \int_0^{\infty} e^{-\theta P(s)} g^{+}(s,\theta)d\theta\,.$$

Легко видеть, что последнее слагаемое в (12) возрастает при $t \to \infty$ не быстрее t^h. В тоже время выражение

$$e^{tP(s)}\left[V_0^{+}(s) + J_0(s)\right]$$

заведомо возрастает экспоненциально, если $V_0^{+}(s) + J_0(s) \ne 0$.

Следовательно, необходимым условием корректности задачи (6)-(7)-(9) является выполнение соотношения

$$V_0^{+}(s) + J_0(s) \equiv V_0^{+}(s) + \int_0^{\infty} e^{-\theta P(s)} g^{+}(s,\theta)d\theta = 0\,. \tag{13}$$

Но для системы это условие для корректности не достаточно, ибо, полученное решение может не принадлежать пространству $\widetilde{H}_{+}^{\beta}$. Однако в случае одного уравнения (1) условие (13) является необходимым и достаточным условием для корректности задачи (1)-(3). В этом случае условие (13) эквивалентно условию вида:

$$a_0V_0(s) + a_1V_1(s) + \ldots + a_{m-1}V_{m-1}(s) = (-1)^m \int_0^{\infty} e^{-\theta\lambda_q(s)} g(s,\theta)d\theta$$

$$(q = r, r+1, \ldots, m-1), \tag{14}$$

где функции $a_j(s)$-некоторые многочлены от корней $\lambda_0^{(j)}, \ldots, \lambda_{m-1}^{j}$. Следовательно, в полуплоскости $\operatorname{Im} s > \beta$ левая часть (14) есть аналитическая функция, растущая при $|s| \to \infty$ не быстрее $|s|^P$. Поэтому левая часть (14) принадлежит классу $\widetilde{H}_{+}^{\beta}$. Тогда правая часть в (14) (т.е. функция $G_q(s)$ из (7)) как функция от s, определенная первоначально только в области

$\mathrm{Re}\,\lambda_{q(s)} > 0$, $\mathrm{Im}\,s > \beta$, должна аналитически продолжаться на всю полуплоскость $\mathrm{Im}\,s > \beta$ до элемента $\widetilde{H}_{+}^{\beta}$.

Можно показать, что верно и обратное, т.е. если функции $G_q(s)$ ($q = r, r+1, \dots, m-1$) аналитически продолжаются в полуплоскость $\mathrm{Im}\,s > \beta$ до функций из класса $\widetilde{H}_{+}^{\beta}$, то задача (1)-(3) поставлена корректно в классе H_{+}^{β}.

Замечание. Аналогичная задача для корректных по Петровскому уравнений была рассмотрена в [1] С.Л.Соболевым, где были найдены некоторые типы условий, при выполнении которых задача, вообще говоря, разрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Л.Соболев. ДАН СССР, т.122, №4, 1958.
2. Г.Е.Шилов. Математический анализ. М., 1965.
3. Н.М.Сулейманов. О корректной постановке краевых задач в полупространстве для эволюционных уравнений. Сб. материалы научной конференции, Баку, 1967.
4. В.М.Борок. Краевая задача в бесконечном слое, Изв.АН СССР, 1971,т.35,№4.

SONSUZ YARIMZOLAQDA ÜMUMİLƏŞMİŞ FUNKSİYALAR SİNFİNDƏ KORREKT SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİ HAQQINDA

N.M.SÜLEYMANOV

ANNOTASİYA

Məqalədə xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün sonsuz yarımzolaqda (ümumiləşmiş funksiyalar sinfində) korrekt sərhəd məsələlərinin qoyuluşu tədqiq edilir. Məsələnin korrekt olması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılır.

ON CORRECT BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN INFINITE HALF-BAND IN THE CLASS GENERALIZED FUNCTIONS

N.M.SULEYMANOV

ABSTRACT

In this work the question conserning to the correct statement of some mixed problems in infinite half-band for the differential equations with partial derivatives in the class generalized functions is studied. The nesessary and satisfaction condition for the correct statement of the mixed problem in some class of generalized functions.